

und (10a) anzuwenden. Das Ergebnis dieser Rechnungen zeigt Abb. 2, in die auch die Originalwerte eingetragen sind. In Abb. 2 ist erkenntlich, daß die Meßwerte für die häufigeren Isotope 110—116 recht gut auf den Geraden liegen, während dies bei den seltenen Isotopen 106 und 108 wegen der Meßgenauigkeit nicht der Fall ist.

Zur Berechnung des Masseneffektes μ wurde folgende, für kleine Anreicherung gültige Formel benutzt:

$$f_0 \mu = \frac{\frac{m}{m_0} - 1}{\sum_i^i T_0 \left(\frac{i_m}{m_0} - 1 \right)^2}. \quad (13)$$

Dabei ist m das Atomgewicht der gesamten angereicherten Substanz (also das Mittel der Proben 1 bis 4) und f_0 die Vervielfachung für diese angereicherte Substanz. Es ist

$$f_0 = \frac{L}{F N_{\text{Cl}}}, \quad (14)$$

wo L die transportierte wirksame Ladungsmenge ($L = 90000$ Coulomb), $F = 96500$ Coulomb und N_{Cl} der Chlorgehalt der Proben 1 bis 4 in Mol ist ($N_{\text{Cl}} = 0,0452$). Es ergab sich

$$\mu = -0,067.$$

Ebenso wie bei den von uns früher gemessenen μ -Werten ist auch hier anzunehmen, daß der wirkliche μ -Wert größer, aber bestimmt nicht kleiner ist als der gemessene, weil die Verluste von angereichertem Material, z. B. durch Konvektion während des Versuchs, den gemessenen μ -Wert stets herabmindern.

Probe Nr.	$f_{n_0} \mu$	f_{n_0}
1	- 4,48	67
2	- 2,54	38
3	- 1,58	24
4	- 0,85	13
5	+ 0,06	- 0,9

Tab. 3. Die der Abb. 2 zugrunde liegenden Größen $f_{n_0} \mu$ und die Vervielfachungen f_{n_0} .

In Tab. 3 sind die aus den Versuchsergebnissen berechneten $f_{n_0} \mu$ - und f_{n_0} -Werte eingetragen. Bei Probe 5 scheint sich die Anreicherung der schweren Isotope im Anodenraum bemerkbar zu machen, jedoch nur innerhalb der Fehlergrenze. Mit Hilfe von Gl. (4) und Tab. 3 kann man alle hier auftretenden Trennfaktoren berechnen, z. B. den größten vorgekommenen Trennfaktor $^{106} \text{ } ^{116} Q_{10} = 1,5$ oder den Trennfaktor $^{106} Q_{10} = 1,046$ für 1% Massenunterschied in Probe 1.

Zur Veranschaulichung der relativistischen Zeitdilatation

Von KURT HANS von KLITZING¹

(Z. Naturforschg. 3a, 176—179 [1948]; eingegangen am 21. Oktober 1946)

Es wird am Beispiel des Hohlraumresonators gezeigt, daß die relativistische Zeitdilatation ähnlich wie die schon früher aus elektrodynamischen Gründen gefolgte Lorentz-Kontraktion anschaulich gedeutet werden kann. Der transversale Doppler-Effekt wird behandelt. Es wird darauf hingewiesen, daß die dargelegten Veranschaulichungen lediglich den Charakter einer Hilfsvorstellung haben können.

Das Bestreben, die relativistischen Effekte durch dem anschaulichen Verständnis näher zu bringen, daß man ihr Zustandekommen klassisch zu erklären versucht, führt bekanntlich bei der sogen. Lorentz-Kontraktion verhältnismäßig leicht zum Ziele.

Wie aus einer zuerst im Jahre 1889 von O. Heaviside durchgeführten Rechnung hervorgeht, erfahren die Äquipotentialflächen des elektrischen Feldes aus elektrodynamischen Gründen bei einer gleichförmigen Translationsbewegung eine Ver-

kürzung in der Bewegungsrichtung im Maßstab $1: \sqrt{1 - v^2/c^2}$, wobei unter v die Translationsgeschwindigkeit, unter c die Lichtgeschwindigkeit verstanden wird. Im Rahmen der neueren Vorstellungen vom elektrischen Aufbau der Materie bereitet es keine Schwierigkeiten, das gleiche Gesetz auch für die Atome und damit für alle Körper als gültig anzunehmen. Man erhält so eine anschauliche Erklärung für das Ergebnis des Michelson-Versuchs sowie für die Tatsache, daß die genannte

¹ Ratzeburg (Lbg.), Möllnerstr. 27.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Kontraktion der Aquipotentialflächen mit Rück-
sicht auf die gleichzeitige Veränderung aller Maß-
stäbe vom mitbewegten Beobachter nicht gemessen
werden kann.

Vom Standpunkt der Relativitätstheorie aus muß freilich dazu gesagt werden, daß es physikalisch sinnlos ist, ein Bezugssystem als das „ruhende“, ein anderes als das „bewegte“ zu kennzeichnen. Die genannte Veranschaulichung hat also keine physikalische Bedeutung. Trotzdem vermag sie wesentlich zum Verständnis der Relativitätstheorie beizutragen.

Für eine andere wichtige Folgerung des Relativitätsprinzips, nämlich die sogenannte Zeitdilatation, ist eine anschauliche Behandlung weniger leicht möglich. Doch kommt man auch hier durch folgende Überlegung zum Ziele:

Als Prototyp einer jeden Uhr werde ein Hohlraumresonator angenommen, also im idealen Falle eine Hohlkugel, von deren Zentrum ein Lichtsignal ausgeht, das nach Reflexion an der Wand in das Zentrum zurückkehrt. Die Zeit von der Aussendung bis zur Rückkehr des Signals sei die Periode τ der Uhr. Es ist dies gewissermaßen das physikalisch einfachste Modell einer Uhr, und man hat sich vorzustellen, daß alle Uhren gegenüber einer gleichförmigen Translationsbewegung das gleiche Verhalten zeigen wie diese Lichtuhr. Der Grund dafür ist in dem elektromagnetischen Aufbau der Materie zu sehen, der bedingt, daß auch allen mechanischen Schwingungen letzten Endes elektromagnetische Wellen zugrunde liegen. Im folgenden werde nun der Einfluß einer gleichförmigen Translation untersucht.

1.

Vom Zentrum eines kugelförmigen Hohlraumresonators gehe eine Kugelwelle aus. Die Zeit bis zu ihrer Rückkehr in den Mittelpunkt werde als Eigenperiode des Resonators angesehen. Bewegt sich die Kugel mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v , so ist die Zeit, die die Lichtwelle braucht, um den Kugeläquator zu erreichen (die Äquatorebene stehe senkrecht auf der Bewegungsrichtung) im Verhältnis $c : \sqrt{c^2 - v^2}$ vergrößert, da ja der Kugeläquator in dieser Zeit mit der Geschwindigkeit v fortgeschritten ist. Die Zeit, die die bei der Reflexion vom Kugeläquator ausgehenden Elementarwellen brauchen, um den inzwischen ebenfalls weitergerückten Mittelpunkt wieder zu er-

reichen, ist also nicht mehr τ , sondern

$$\frac{\tau c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß ja die Kugel die Lorentz-Kontraktion erleidet, so läßt sich zeigen, daß der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, an denen die Kugelwelle das bewegte Ellipsoid erreicht, im ruhenden System ein zweites ähnliches, aber größeres Ellipsoid ist, dessen Brennpunkte mit dem Ausgangs- und Endpunkt der Kugelwelle, also mit dem Zentrum des Hohlraumresonators, in den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ zusammenfallen.

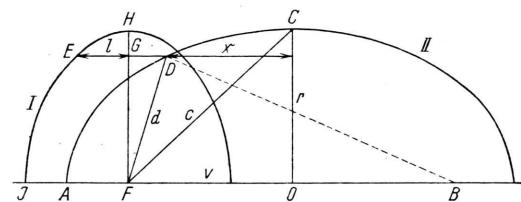


Abb. 1

Da in diesem Ellipsoid alle Lichtwege gleich lang sind, treffen alle reflektierten Elementarwellen synchron im zweiten Brennpunkt ein.

Zum Beweis werde Abb. 1 herangezogen. Die Ellipse I stelle den Schnitt des bewegten Resonators dar. Die Bewegung ist parallel zur positiven x -Achse gerichtet. F ist der Ausgangspunkt der Kugelwelle, B der Endpunkt; beide sind die Brennpunkte der liegenden Ellipse II. Ellipse I ist entstanden aus einem Kreis um F mit dem Radius $FH = OC$ durch Verkürzung seiner x -Koordinaten im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$; Ellipse II ist aus einem gleich großen Kreis um O entstanden durch Verlängerung der x -Koordinaten im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$. Es besteht also die Proportion

$$FC:FO \equiv c:v \equiv AO:FO,$$

Behauptet wird, daß bei einer Verschiebung der Ellipse I mit der Geschwindigkeit v die einzelnen Punkte dieser Ellipse die Ellipse II gleichzeitig mit der von F ausgehenden Kugelwelle, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, erreichen. Mit anderen Worten: Läßt man den Punkt D auf dem Ellipsenbogen AC und entsprechend den Punkt E auf der Ellipse I wandern, so besteht ständig die Proportion $ED : FD = v : c$. Zur Ver-

einfachung der Schreibweise werde $EG = l$, $FD = d$, $\frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1$ gesetzt; also lautet die Behauptung, wenn x die Koordinate des Punktes D in der Bewegungsrichtung, bezogen auf O, bedeutet,

$$\frac{l+v-x}{d} = \frac{v}{c}.$$

Die numerische Exzentrizität der großen Ellipse ist $\epsilon = v/c$; die Länge des Brennstrahls d also $d = c - x\epsilon$,

$$d = c - x v/c. \quad (1)$$

In der Ellipse I ist zur Aufstellung der Mittelpunktsgleichung die x -Koordinate gleich l zu setzen; die Gleichung lautet also

$$y^2 + \frac{l^2}{1-v^2/c^2} = r^2 = c^2 - v^2$$

oder $l^2 = (c^2 - v^2 - y^2)(1 - v^2/c^2)$, während für die Ellipse II $y^2 = (c^2 - x^2)(1 - v^2/c^2)$ ist. Dabei ergibt sich für den Schnittpunkt beider Ellipsen nach Verschiebung der Ellipse I um das Stück ED

$$l = x(1 - v^2/c^2). \quad (2)$$

Bildet man nun den Ausdruck $(l + v - x)/d$ unter Einsetzen der Werte (1) und (2), so ergibt sich

$$\frac{l+v-x}{d} = \frac{v}{c},$$

was zu beweisen war².

Der mitbewegte Beobachter wird also feststellen, daß die Kugelwellen seines Hohlraumresonators trotz der Bewegung nach wie vor als Kugelwellen vom Zentrum des Resonators ausgehen und auch als solche dahin zurückkehren. Da ihm eine richtig gehende Vergleichsuhr fehlt, ist er nicht in der Lage, die als Folge der Bewegung eingetretene Verlängerung der Eigenperiode des Resonators festzustellen. Ebenso bemerkt er in-

² Anm.: Man kann den hier bewiesenen Sachverhalt durch folgenden Satz aussprechen: Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, deren Entfernung von einer Ellipse, parallel zur großen Hauptachse gemessen, zu der Länge des zugehörigen Brennstrahls in einem festen Verhältnis gleich der numerischen Exzentrizität steht, ist eine zweite, ähnliche Ellipse. Ihre große Halbachse ist gleich der kleinen Halbachse der ersten Ellipse; die großen Halbachsen stehen senkrecht aufeinander und der Mittelpunkt der kleinen Ellipse fällt mit dem einen Brennpunkt der großen zusammen.

folge der Verkürzung seiner Maßstäbe nichts von der Kontraktion seines Resonators.

Die Betrachtung liefert gleichzeitig die Theorie des Michelson-Versuchs, sobald man sich in den Punkten J und H Spiegel aufgestellt denkt, die die von F ausgehenden Lichtstrahlen reflektieren.

Ebenso ermöglicht diese Betrachtung die Ableitung der Lorentz-Transformation ohne Benutzung des Relativitätsprinzips; man braucht dazu nur die Veränderung der Maßstäbe einschließlich des Zeitmaßes im bewegten System zu betrachten und die Beziehung zwischen den Koordinaten beider Systeme hinzuschreiben. Auf die nähere Ausführung sei hier verzichtet.

2.

Ein weiterer relativistischer Effekt, der eng mit der Zeidilatation zusammenhängt, ist der *transversale Doppler-Effekt*. Die relativistische Formel für ihn lautet bekanntlich $v' = v \sqrt{1 - v^2/c^2}$; darin ist v die Frequenz der Lichtquelle, wie sie einem relativ zu ihr ruhenden Beobachter erscheint; v' ist die geänderte Frequenz der Lichtquelle, gemessen im relativ zu ihr bewegten System bei Beobachtung senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Für den „ruhenden“ Beobachter ergibt sich dieser Effekt ganz einfach aus der Verlangsamung einer bewegten Uhr, wie sie im Abschn. 1 betrachtet wurde.

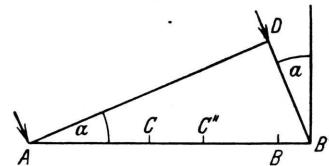


Abb. 2.

Für den „bewegten“ Beobachter und eine „ruhende“ Lichtquelle sieht die Erklärung indes ganz anders aus. In diesem Fall muß ein Irrtum berücksichtigt werden, dem der bewegte Beobachter hinsichtlich der Richtung der ankommenden Lichtwellen unterliegt. Der Beobachter möge ein Spiegelteleskop so aufstellen, daß seine Achse senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. In Abb. 2 seien A und B zwei einander gegenüberliegende Punkte des Hohlspiegels, durch die die Brennebene hindurchgeht. Auf dem Fadenkreuz C, also im Brennpunkt des Spiegels, werden nun infolge der Bewegung des Fernrohrs nicht die Punkte abgebildet, auf die die Fernrohrachse hin-

zeigt, sondern es tritt Aberration ein. Die Wellenfläche, die tatsächlich ihren unendlich fernen Ausgangspunkt im Mittelpunkt abbildet, habe in dem Augenblick, in dem sie den Punkt A erreicht, die Lage AD. In dem Augenblick, in dem der Punkt B von der Wellenfläche erreicht wird, hat er die Lage B'. Wenn die Welle den Brennpunkt des Spiegels erreicht, hat dieser die Lage C'.

Das Licht braucht die Zeit t , um von A nach C' zu kommen:

$$AC'' = ct; \quad CC'' = vt,$$

ferner

$$DB' + B'C'' = ct.$$

Es sei weiterhin

$$BB' = vt_1, \quad DB' = ct_1,$$

$$B'C'' = ct_2, \quad t_1 + t_2 = t.$$

Dann gilt

$$\sin \alpha = \frac{DB'}{AB'} = \frac{ct - ct_2}{ct + ct_2} = \frac{t - t_2}{t + t_2}. \quad (3)$$

Nun ist

$$AC'' = \frac{AB}{2} + CC'',$$

und da $AB = ct + ct_2$, so ist auch

$$AC'' = \frac{c}{2}(t + t_2) + vt = ct;$$

also

$$t + t_2 = \frac{2ct}{c+v} \quad \text{und} \quad t_2 = t \frac{c-v}{c+v}. \quad (4)$$

Man erhält nun durch Einsetzen in (3)

$$\sin \alpha = v/c. \quad (5)$$

Um diesen Winkel ist die Richtung des einfallenden Lichts gegen die Normale zur Bewegungsrichtung geneigt. Es muß also infolge Aberration ein Doppler-Effekt eintreten, wenn eine ruhende Lichtquelle vom bewegten System aus transversal zur Bewegungsrichtung beobachtet wird.

Ist der Abstand zweier aufeinanderfolgender Wellenflächen $\lambda = c\tau$, so erscheint diese Größe dem bewegten Beobachter gedehnt zu $\lambda' = c\tau'$, da sein Beobachtungsinstrument während der Zeit τ' von P nach P' um das Stück $v\tau'$ weitergewandert ist. Wie sich aus Abb. 3 ergibt, ist

$$\frac{c\tau' - c\tau}{v\tau'} = \sin \alpha,$$

und man erhält mit Rücksicht auf (5)

$$\tau/\tau' = 1 - v^2/c^2 \quad (6)$$

oder

$$\tau' = \tau(1 - v^2/c^2). \quad (7)$$

Die Frequenz wird vom bewegten Beobachter mit der Frequenz einer mitbewegten Uhr verglichen. Da diese um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ zu langsam geht, findet er an Stelle von ν' den Wert

$$\nu'' = \nu \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8)$$

also in der Tat die relativistische Formel. Der bewegte Beobachter hat daher den gleichen Eindruck, den der ruhende Beobachter hat, nämlich daß die Uhr des relativ zum eigenen Standort bewegten Systems langsamer geht.

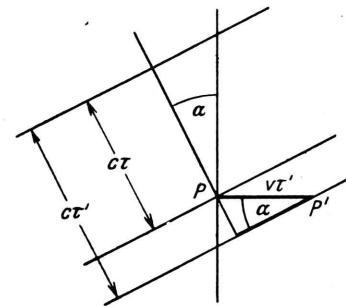


Abb. 3.

3.

Die vorangegangenen Betrachtungen sollten zeigen, daß es möglich ist, auch der relativistischen Zeitdilatation genau wie der Lorentz-Kontraktion eine anschauliche Deutung zu geben. Dabei sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es sich wirklich nur um eine Veranschaulichung handelt, der eine Realität im physikalischen Sinne nicht zukommt. Wir sind genötigt, den Geltungsbereich der Physik streng auf diejenigen Gebiete zu begrenzen, die der Messung zugänglich sind. Die physikalische Messung jedoch wird eine Entscheidung darüber, welches System „in Wahrheit“ das ruhende und welches das bewegte ist, niemals zulassen. Insofern also hat auch die Vorstellung von der Form einer Wellenfläche in einem bestimmten Augenblick, wie sie oben verwendet wurde, lediglich den Charakter einer Hilfsvorstellung, der keine physikalische Realität entspricht.